Chapitre 1. Les choix intertemporels

A. La consommation et l'épargne

23 janvier 2012

0. Introduction

(dC/dY)*Y/C

1. Faits stylisés

- La consommation représente environ 2/3 du PIB dans les pays de l'OCDE. Considérable.
- La consommation varie moins que le revenu disponible.
- Elasticité de la consommation par rapport au revenu : environ 0,5 à court terme et 1 à long terme.
- Au niveau micro, la consommation varie au cours du cycle de vie d'un agent (courbe en cloche, comme le revenu).

b

a
2

La relation entre C et Y n'est pas stable :
a) Entre ménages différents au même moment
b)dans le même pays, pendant le temps
c)entre ménages, groupes différents

2. La fonction de consommation keynésienne

$$C = cR + b$$

C et R consommation et revenu réels

- L'épargne est un solde S=R-C=(1-c)R-b
- Consommation et épargne ne dépendent pas du taux d'intérêt
- Propension marginale à consommer : $dC/dR = c < 1$, constante l'élasticité ne l'est pas..
- Propension moyenne à consommer : $C/R = c + b/R$, décroissante avec le revenu dès lors que $b > 0$ d(c+b/R)/dR=-b/(R^2)
- Taux d'épargne $t = (R - C)/R = 1 - c - b/R$ croissante du revenu

dt/dR=(b)/(R^2)>0

donc, Cm diminue avec R et S augmente avec R

3. Le multiplicateur

- Equilibre emplois-ressources (économie fermée) : $Y = C + I + G$
- Tout le revenu disponible est distribué aux ménages : $Y = R$
- Fonction de consommation keynésienne : $C = cR + b$

Alors $(1 - c)Y = b + I + G$ et

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - c} > 1$$

L'existence et stabilité de la fonction de consommation keynésienne sont les fondements du multiplicateur et donc de la politique macroéconomique de relance keynésienne

4. Deux critiques

- *Les délais d'ajustement de la consommation au revenu*
  Observation empirique robuste : l'épargne réagit avant la consommation aux variations de revenu.
- *Le paradoxe de Kuznets*
  Kuznets (1942) met en évidence sur séries temporelles (50 ans) une certaine constance à long terme du taux d'épargne, ce qui implique l'égalité des propensions à consommer moyenne et marginale ($b = 0$).
  Par contre, les études sur données de panels de ménages vérifient que les hauts revenus ont en général un taux d'épargne plus élevé : $b > 0$, propension à consommer moyenne supérieure à propension marginale.

b varie avec le temps..elle est comment la fonction de conso ??

I. Le modèle de cycle de vie – revenu permanent

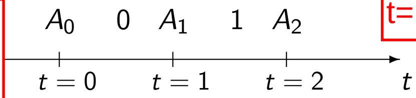
Première tentative pour donner des fondements microéconomiques à une fonction macroéconomique.

1. Le modèle à deux périodes

- Le ménage vit deux périodes notées 0 et 1.
- Les décisions du ménage et les flux qu'elles entraînent (consommation, épargne) ont lieu par convention en fin de période.
- Ressources initiales du ménage : actif financier A_0 dont il hérite à la date $t = 0$.
- Le patrimoine financier rapporte intérêt au taux r.

t=0: A0
t=1:(1+r)A0

t: x
t+1:(1+r)x
t+2:(1+r)((1+r)x)=x(r+1)^2
t+3: x(1+r)^3



…ibution temporelle du patrimoine des ménages

- Revenu hors intérêt (par exemple du travail) disponible à la fin de la période 0 : R_0
- Ressources totales à la fin de la période 0 : $A_0(1+r)+R_0$

a)

- Contrainte budgétaire période 0 : $A_0(1+r)+R_0 = C_0 + A_1$
- Revenu disponible brut : $R_0 + rA_0$; épargne financière : $E_0 = A_1 - A_0$

flow!

b)

- De même, contrainte budgétaire période 1 : $A_1(1+r)+R_1 = C_1 + A_2$
- Contrainte budgétaire intertemporelle :

a)+b)

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+r} = R_0 + \frac{R_1}{1+r} + A_0(1+r)$$

- Dans b) isoler A1
-Remplacer def A1 dans a)

La *richesse* W du ménage est composée de deux termes : la somme actualisée des revenus futurs du travail, appelée *richesse humaine*, et l'écart actualisé entre patrimoine initial et patrimoine terminal, appelé *richesse financière* :

$$W = \left(R_0 + \frac{R_1}{1+r}\right) + \left(A_0(1+r) - \frac{A_2}{1+r}\right)$$

de la CB: C0+C1/(1+r)=W

Programme du consommateur :

différence avec Keynes ? Discuter

$$\begin{cases} \max U(C_0, C_1) \\ C_0 + \frac{C_1}{1+r} = W \end{cases}$$

où U est la fonction d'utilité, bornée, strictement croissante, strictement concave, deux fois continûment différentiable, avec $\lim_{C \to 0} U'_C = +\infty$.

Condition du premier ordre (*équation d'Euler*) :

$$U'_{C_0} = (1+r)U'_{C_1}$$

C0: L=U'c0

C1: U'c1=L/(1+r)

Hypothèse fréquente sur la forme de la fonction d'utilité : elle est *homothétique*, i.e. c'est une fonction monotone croissante F d'une fonction homogène de degré 1 v :

$$U(C_0, C_1) = F\left(v(C_0, C_1)\right)$$

f(tx,ty)=f(x,y)t^h,
h=1

Exemples :

1

$$U(C_0, C_1) = \alpha \ln C_0 + (1-\alpha) \ln C_1 \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

F est la fonction ln et v la fonction de Cobb–Douglas à rendements d'échelle constants $v(C_0, C_1) = C_0^{\alpha} C_1^{1-\alpha}$

2

$$U(C_0, C_1) = \alpha C_0^{\rho} + \beta C_1^{\rho} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \rho < 1$$

F est la fonction puissance $F(x) = x^{\rho}$ et v la fonction CES à rendements d'échelle constants $v(C_0, C_1) = [\alpha C_0^{\rho} + \beta C_1^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$

Étude du deuxième exemple :

Beta=1/(1+ro). C0+betaC1.
beta petit, impatience

$$U(C_0, C_1) = \frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}\left(C_0^{1-\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{1+\rho}C_1^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)$$

ρ est le taux de préférence pour le présent et $\gamma > 0, \neq 1$ l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation.

Cette fonction peut encore s'écrire, si on note $u(C) = \frac{C^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}}$,

$$U(C_0, C_1) = u(C_0) + \boxed{\frac{1}{1+\rho}}u(C_1)$$

On a alors $U'_{C_0} = u'(C_0)$ et $U'_{C_1} = \frac{1}{1+\rho}u'(C_1)$, et l'équation d'Euler devient

$$u'(C_0) = \frac{1+r}{1+\rho}u'(C_1)$$

soit

$$C_1 = C_0\left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\gamma}$$

maxU,sous C0+C1/(1+r)=W
C0:U'c0=L
C1:U'c1/(1+ro)-L/(1+r)

On note α le taux de croissance de la consommation entre les deux périodes de la vie. On a

$$C_1 = C_0(1+\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\gamma} - 1$$

On reporte dans la contrainte budgétaire intertemporelle et on obtient :

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1+r}{2+r+\alpha} W \\ C_1 = \frac{(1+\alpha)(1+r)}{2+r+\alpha} W \end{cases}$$

La consommation aux 2 périodes de la vie est proportionnelle à la richesse.

remplacer C1 dans CB: C0(1+a)/(1+r)+C0=W,C0(2+a+r)/(1+r)=W
Puis C1=(1+a)C0. Remplacer C0.

2. L'hypothèse du cycle de vie

Modigliani et Brumberg, 1954

Au niveau microéconomique, extension du cadre à deux périodes à plusieurs périodes de vie.
L'individu représentatif reçoit un flux de revenus en cloche.
Hypothèse de cycle de vie : face à ce revenu fluctuant au cours du temps, l'individu souhaite maintenir un niveau constant (ou tendanciellement croissant) de consommation, i.e. lisser sa consommation. Pour cela, il doit emprunter ou, s'il possède un patrimoine initial, désépargner au début de sa vie, épargner au milieu puis désépargner à la fin de sa vie, sous contrainte que la valeur présente de sa consommation totale n'excède pas sa richesse.

avec 2 périodes : W= R0+R1/(1+r)+A0(1+r)-A2/(1+r)

- Le ménage i vit $T+1$ périodes
- W_0^i richesse au début de la période 0
- R_s^i revenu anticipé de la période s
- r_s taux d'intérêt anticipé de la période s
- Alors

$$W_0^i = \sum_{s=0}^{T} \frac{R_s^i}{\prod_{j=0}^{s}(1+r_j)} + \left(A_0 - \frac{A_{T+1}}{\prod_{j=0}^{T}(1+r_j)} \right)$$

ou, si le taux d'intérêt anticipé est constant,

$$W_0^i = \sum_{s=0}^{T} \frac{R_s^i}{(1+r)^{s+1}} + \left(A_0 - \frac{A_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} \right)$$

- Hypothèse du cycle de vie :

$$C_t^i = f(W_t^i) = kW_t^i \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

Pour qu'il soit possible d'obtenir rigoureusement cette proportionnalité de la consommation à la richesse, il faut supposer :

- une période de vie avec un horizon fini sans incertitude sur la date de la mort, ou un horizon infini ;
- la maximisation d'une fonction d'utilité intertemporelle sous une contrainte intertemporelle de budget ;
- des préférences intertemporelles additivement séparables ;
- une fonction d'utilité de chaque période
  - soit à élasticité de substitution intertemporelle constante,
  - soit quelconque (pourvu qu'elle soit concave), auquel cas il faut une hypothèse supplémentaire qui est celle d'égalité entre taux d'intérêt et taux de préférence pour le présent ;
- un marché financier parfait.

ces

1+r=1/beta

Ct dépend que de W

Avec la même fonction d'utilité à élasticité de substitution intertemporelle constante que dans le cas à 2 périodes mais $T+1$ périodes de vie, on peut montrer que :

$$\begin{cases} C_0^i = k_0 W_0^i \quad \text{avec } k_0 = \frac{\frac{r-\alpha}{1+r}}{1-\left(\frac{1+\alpha}{1+r}\right)^{T+1}} \\ \widetilde{C}_1^i = (1+\alpha) k_0 W_0^i \\ \widetilde{C}_2^i = (1+\alpha)^2 k_0 W_0^i \\ \vdots \\ \widetilde{C}_T^i = (1+\alpha)^T k_0 W_0^i \end{cases}$$

voir manuel Hairault

taux croissance conso

$\widetilde{C}_1^i = (1+\alpha) k_0 W_0^i$ est la consommation que l'agent i prévoit en période 0 d'effectuer en période 1.

Même raisonnement pour toute période de la vie de l'agent.
On obtient, en l'absence de nouvel élément dans le calcul de la richesse,

$$
\begin{aligned}
C_t^i &= (1+\alpha)^t k_0 W_0^i = k_t W_t^i \quad \text{avec } k_t = \frac{\frac{r-\alpha}{1+r}}{1-\left(\frac{1+\alpha}{1+r}\right)^{T+1-t}} \\
\text{et } W_t^i &= (1+r)^t W_0^i - (1+r)^{t-1} C_0^i - (1+r)^{t-2} C_1^i - \ldots - C_T^i
\end{aligned}
$$

- *Cohérence temporelle* des choix.
- Révision si nouvel élément dans le calcul de la richesse.

faits stylisés sur la conso !

- l'agent décide en t de consommer proportionnellement à la valeur présente de sa richesse W_t^i calculée en t ;
- le coefficient de proportionnalité k_t est fonction du taux d'intérêt, du taux de préférence pour le présent mais aussi de la durée de vie restant à l'agent ;
- si la fonction d'utilité est à élasticité de substitution intertemporelle γ constante, on a

$$k_t = \frac{\frac{r-\alpha}{1+r}}{1-\left(\frac{1+\alpha}{1+r}\right)^{T+1-t}} \quad \text{avec } \alpha = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\gamma} - 1$$

cycle de vie !!

SI CES

cohérent avec donnés

La transposition de cette analyse microéconomique au niveau agrégé donne la fonction de consommation macroéconomique :

$$C_t = kW_t$$

L'intuition davantage qu'un calcul rigoureux permet d'écrire cette fonction : l'économie est, à toute date t, composée d'un grand nombre de ménages d'âges différents et donc à un moment différent de leur cycle de vie, et il n'est pas possible de sommer sans précaution les équations individuelles.

Question centrale : la mesure empirique de la richesse W_t, composée des flux actualisés des revenus du travail et du patrimoine accumulé.

3. L'hypothèse de revenu permanent

=somme t=0,t=T Ct/(1+r)^t+1

Milton Friedman, 1957.
Définition du revenu permanent :

$$R_0^p \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^{t+1}} = \sum_{t=0}^{T} \frac{R_t}{(1+r)^{t+1}} + \left(A_0 - \frac{A_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} \right) = W_0$$

Cas d'un horizon de vie infini (celui envisagé par Friedman) :

(1+r)/r-->1/r

$$R_0^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = W_0 \iff R_0^p = rW_0$$

Le revenu permanent est le montant que l'agent peut dépenser sans affecter la valeur d'un patrimoine placé au taux r. C'est l'annuité constante de la richesse.

voir def W0 slide 13

L'hypothèse de revenu permanent consiste à supposer que l'agent, au niveau microéconomique, et l'ensemble des ménages, au niveau macroéconomique, consomment effectivement ce montant :

$$C_t = R_t^p$$

ou plus généralement :

$$C_t = kR_t^p \quad \text{avec} \quad k > 0$$

Très forte analogie avec le modèle de cycle de vie. La littérature confond les deux modèles.

Le modèle de Friedman est en fait plus complet.

- La consommation effective est la somme d'une consommation permanente et d'une consommation transitoire (accidentelle) u_t, et le revenu est aussi affecté d'accidents transitoires v_t :

LT

$$C_t + u_t = k(R_t^p + v_t) \iff C_t = kR_t^p + kv_t - u_t$$

avec v_t non corrélé à u_t, v_t non corrélé à R_t^p, u_t non corrélé à R_t^p et C_t.

- Dans l'article initial de Friedman, le revenu permanent est défini par *anticipations extrapolatives* :

depend du passé

$$R_t^p = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i R_{t-i} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

On peut alors montrer que :

$$C_t = \alpha C_{t-1} + k(1-\alpha)R_t + \underbrace{kv_t - k\alpha v_{t-1} - u_t + \alpha u_{t-1}}_{\epsilon_t}$$

court terme

La consommation dépend du revenu courant et de la consommation de la période précédente.

Propensions marginales à consommer le revenu courant :

cohérent avec faits a) et b)

$$\begin{cases} \text{à court terme :} & k(1-\alpha) \\ \text{à long terme :} & k \end{cases}$$

- La propension marginale à long terme est égale à la propension moyenne à long terme, ce qui résout le paradoxe de Kuznets.
- Si $k = 1$ (l'agent consomme à chaque période tout son revenu permanent, aux composantes transitoires près) la propension à consommer à long terme est égale à 1. C'est ce cas qui est jugé le plus plausible par Friedman.
- Un choc sur le revenu est absorbé temporairement par l'épargne. Ce résultat est important : il implique que la marge de manœuvre de la politique économique est réduite puisque les mesures de relance n'ont qu'un effet amorti sur la consommation courante.

le multiplicateur keynesien ne marche pas aussi bien...

4. Rationnement du marché du crédit, imperfection des marchés financiers

- les taux d'intérêt créditeurs sont différents des taux débiteurs (généralement inférieurs),
- la demande de crédit à la consommation est rationnée par les quantités : certaines catégories d'agents, aux revenus faibles, ne peuvent pas emprunter.

On peut alors montrer que la propension à court terme à consommer le revenu disponible s'accroît fortement et devient même égale à 1 pour certaines valeurs du revenu.

Cas à deux périodes et fonction d'utilité à élasticité de substitution intertemporelle constante. ici A=0

Consommation optimale de première période en l'absence de contrainte :

voir slide p 11

$$C_0 = \frac{1+r}{2+\alpha+r} W, \quad \text{avec} \quad W = R_0 + \frac{R_1}{1+r} \quad \text{et} \quad 1+\alpha = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\gamma}$$

Écart entre revenu courant et consommation de première période :

$$E_0 = R_0 - C_0 = \frac{(1+\alpha)R_0 - R_1}{2+\alpha+r}$$

Le consommateur souhaite épargner en première période ($E_0 > 0$), quand, à R_1 fixé, $R_0 > \frac{R_1}{1+\alpha}$. Quand c'est l'inverse le consommateur souhaite emprunter.

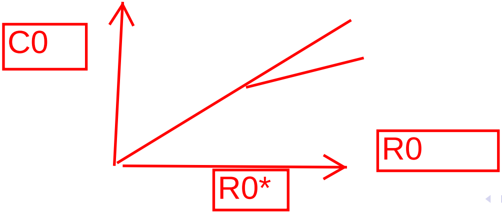
Valeur-limite du revenu de première période en deçà de laquelle le consommateur emprunte et au-delà de laquelle il épargne :

C1=(1+a)C0

$$R_0^* = \frac{R_1}{1+\alpha}$$

E0=0

Cas de rationnement du crédit : l'agent n'a pas la possibilité d'emprunter en première période.
Sa consommation est alors rationnée par $C_0 \leq R_0$.
Pour tous les niveaux de revenus pour lesquels il aurait emprunté en l'absence de contrainte, c'est-à-dire pour $R_0 < R_0^*$, il consomme maintenant exactement son revenu courant et sa propension marginale à consommer est égale à l'unité. Son comportement est inchangé en revanche pour tous les niveaux de revenu pour lesquels il souhaite épargner.



Cas de divergence des taux débiteur r_d et créditeur r_c.

- Si le ménage est épargnant en première période, il est soumis au taux d'intérêt r_c et son épargne vaut :

$$E_0 = \frac{(1+\alpha_c)R_0 - R_1}{2+\alpha_c+r_c} \text{ avec } 1+\alpha_c = \left(\frac{1+r_c}{1+\rho}\right)^{\gamma}$$

  Elle est par hypothèse positive : $R_0 > \frac{R_1}{1+\alpha_c}$.
  À R_1 donné, cette situation apparaît dès lors que

  grand

$$R_0 > \frac{R_1}{1+\alpha_c} = \bar{R}_0$$

  petit

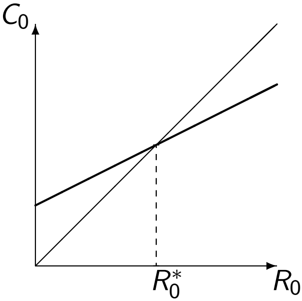
- Si le ménage est emprunteur en première période, il est soumis au taux d'intérêt débiteur r_d. Cette situation apparaît dès lors que son revenu de première période est trop faible :

  petit grand

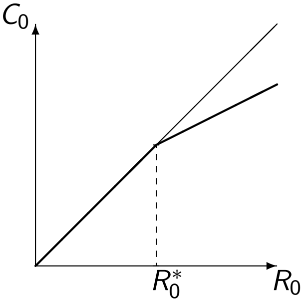
$$R_0 < \frac{R_1}{1+\alpha_d} = \tilde{R}_0 \quad \text{où} \quad 1+\alpha_d = \left(\frac{1+r_d}{1+\rho}\right)^{\gamma}$$

  grand

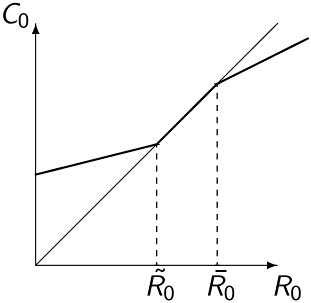
- Pour $\tilde{R}_0 \leq R_0 \leq \bar{R}_0$, l'épargne de première période est nulle, $C_0 = R_0$ et $C_1 = R_1$. Le consommateur est contraint par son revenu courant.



(a) pas de contrainte



(b) crédit rationné



(c) taux différents

Leijonhufvud, 1969 : cette analyse de l'imperfection du marché du crédit peut se généraliser aux autres marchés.

- Les différentes composantes de la richesse d'un agent (revenu du travail, actifs financiers, capital physique...) sont généralement *illiquides*, c'est-à-dire ne peuvent pas être converties en monnaie immédiatement et sans coût.
- Pour certains agents le revenu courant constitue alors bien la contrainte pesant sur leur consommation, les autres composantes de leur richesse étant illiquides.
- Si la contrainte de liquidité pèse sur tous les agents, l'économie est en « crise de liquidité » et, par le mécanisme du multiplicateur, la politique économique keynésienne joue pleinement.

5. Le rôle du taux d'intérêt

Cas à 2 périodes, ménage épargnant en première période, hausse du taux d'intérêt.

- *Effet de substitution* : il devient intéressant de transférer du revenu vers $t = 1$ pour consommer plus alors. L'épargne est en hausse. C_0 diminue et C_1 augmente.
- *Effet de revenu* : une même épargne E_0 rapportera plus en $t = 1$, ou encore, pour une même épargne à consommer en $t = 1$, il est possible d'épargner moins en $t = 0$. L'épargne est en baisse. C_0 augmente et C_1 reste constante.

Effet global ambigu.

Cas à 2 périodes, ménage emprunteur en première période, hausse du taux d'intérêt.

- *Effet de substitution* : il est intéressant de consommer davantage en $t = 1$ et, pour ce faire, il faut emprunter moins en $t = 0$ pour avoir moins à rembourser en $t = 1$. L'emprunt diminue, C_0 diminue et C_1 augmente.
- *Effet de revenu* : pour un même montant à rembourser en $t = 1$ il est faut emprunter un montant plus faible en $t = 0$. L'emprunt diminue, C_0 diminue et C_1 reste constante.

Effet final sans ambiguïté : la hausse du taux d'intérêt pousse le ménage débiteur à emprunter moins et donc à consommer moins en première période de sa vie.

Cas d'une fonction d'utilité U à élasticité de substitution intertemporelle γ constante.

- Mise en évidence de l'effet de substitution

$$\begin{cases} \min C_0 + \frac{C_1}{1+r} \\ U(C_0, C_1) \leq \overline{U} \end{cases}$$

calculs dans le manuel de Hairault

CPO :

$$\tilde{C}_0 = \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1+r}{2+r+\alpha} \overline{U} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_0}{\partial r} = -\frac{\gamma \tilde{C}_1}{(1+r)(2+r+\alpha)} < 0$$

- Effet global

a=-1+((1+r)/(1+ro))^gamma

$$C_0 = \frac{1+r}{2+r+\alpha} W$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \frac{(1-\gamma)(1+\alpha)}{(2+r+\alpha)^2} W + \frac{1+r}{2+r+\alpha} \frac{\partial W}{\partial r}$$

- Si $A_0 = A_2 = 0$ (pas de patrimoine financier), on peut montrer que

dW/dr=d(R0+R1/(1+r))/dr=-R1/(1+r)^2

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \underbrace{-\frac{\gamma C_1}{(1+r)(2+r+\alpha)}}_{\text{effet de substitution}} + \underbrace{\frac{R_0 - C_0}{2+r+\alpha}}_{\text{effet de revenu}}$$

- Si patrimoine financier,

l'effet substitution devient plus fort

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \underbrace{-\frac{R_1}{(1+r)^2}}_{\text{baisse richesse humaine}} + \underbrace{A_0 + \frac{A_2}{(1+r)^2}}_{\text{effet positif dû au patrimoine financier}}$$

L'effet macroéconomique d'une hausse du taux d'intérêt dépend finalement de deux caractéristiques de l'économie :

- la part dans le total des ménages de ceux qui épargnent et de ceux qui empruntent ; pour les premiers, l'effet de la hausse du taux d'intérêt est incertain tandis que pour les seconds la hausse du taux d'intérêt réduit le montant des dettes et décourage la consommation ;
- pour les ménages épargnants, l'importance relative des effets de revenu, de substitution et du patrimoine financier.

Les ménages des économies développées sont globalement prêteurs. Valeur de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation : pas de consensus empirique.

III. Le comportement du consommateur en avenir incertain

1. L'hypothèse de cycle de vie – revenu permanent avec anticipations rationnelles

Modèle de Hall (1978)
Anticipations rationnelles : l'anticipation subjective que l'agent effectue en t concernant son revenu futur en $s \geq t$ correspond à l'espérance mathématique de R_s conditionnellement à toute l'information I_t disponible en t.
Formellement, en notant $R^a_{t,s}$ le revenu anticipé en t pour $s \geq t$:

$$R^a_{t,s} = E\left(R_s | I_t\right) = E_t(R_s)$$

- Ménage vivant $T+1$ périodes
- Richesse anticipée au début de la période 0 :

$$W_0^a = A_0 + E_0\left[\sum_{s=0}^{T} \frac{R_s}{(1+r)^{s+1}}\right]$$

sinon: -(AT +1)/(1+r)^T+1

(hypothèse : actif terminal A_{T+1} nul)

- Si le taux d'intérêt anticipé est constant et non aléatoire, la seule variable aléatoire est le revenu futur et on a, par additivité de l'opérateur espérance mathématique :

$$W_0^a = A_0 + \sum_{s=0}^{T} \frac{E_0(R_s)}{(1+r)^{s+1}}$$

- L'agent maximise son utilité intertemporelle anticipée sous contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} \max E_0\left[\sum_{s=0}^{T} \frac{u(C_s)}{(1+\rho)^{s+1}}\right] \\ E_0\left[\sum_{s=0}^{T} \frac{C_s}{(1+r)^{s+1}}\right] = W_0^a \end{cases}$$

ou encore :

voir notes

$$\begin{cases} \max \sum_{s=0}^{T} \frac{E_0(u(C_s))}{(1+\rho)^{s+1}} \\ \sum_{s=0}^{T} \frac{E_0(C_s)}{(1+r)^{s+1}} = W_0^a \end{cases}$$

Équation d'Euler :

$$E_0\left(u'(C_t)\right) = \frac{1+r}{1+\rho} E_0\left(u'(C_{t+1})\right) \quad \forall t \in [0, T-1]$$

Supposons pour simplifier $r = \rho$. L'équation d'Euler peut encore s'écrire :

$$E_t\left(u'(C_t)\right) = u'(C_t) = E_t\left(u'(C_{t+1})\right)$$

En général, $E_t\left(u'(C_{t+1})\right) \neq u'\left(E_t(C_{t+1})\right)$. Il n'y a égalité que si u' est linéaire, c'est-à-dire si u est *quadratique*. On a alors la propriété d'"*équivalent certain*" : les agents ne s'intéressent qu'à la moyenne, pas à la volatilité.

Avec la fonction d'utilité quadratique

$$u(C_t) = aC_t - \frac{b}{2}C_t^2 \quad a, b > 0$$

on a

$$u'(C_t) = a - bC_t > 0 \Longleftrightarrow C_t < \frac{a}{b}$$

L'équation d'Euler s'écrit :

voir slide préc.

$$E_t\left(a - bC_{t+1}\right) = a - bC_t$$

lissage parfait

i.e.

$$E_t\left(C_{t+1}\right) = C_t$$

i.e.

$$C_{t+1} = C_t + \epsilon_{t+1}$$

où ϵ_{t+1} est un bruit blanc.
La consommation est donc une *marche aléatoire*.
Intuition : quand le ménage fait en t son plan de consommation pour $t+1$, il utilise toute l'information disponible en t ; or cette information a déjà été utilisée pour déterminer la consommation de t. Donc la meilleure prévision de C_{t+1} est bien C_t.

On montre de même qu'à toute période, la consommation est égale au revenu permanent anticipé par l'agent à cette période :

$$C_t = E_t(R^p) \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où

$$C_t - C_{t-1} = E_t(R^p) - E_{t-1}(R^p) = (E_t - E_{t-1})(R^p) \quad \forall t \in [1, T]$$

où le membre de droite représente la révision de l'anticipation de revenu permanent, due à l'acquisition d'informations nouvelles, par définition non anticipées.

- L'évidence empirique suggère que la version quadratique du modèle CV–RP avec AR ne tient pas car les variations de consommation sont trop sensibles au revenu anticipé et pas assez sensibles au revenu non anticipé.
- Explications possibles :
  - les préférences ne sont pas quadratiques ;
  - il existe des contraintes de liquidité et les agents sont contraints par leur revenu courant.

2. Incertitude et épargne de précaution

Quand la fonction d'utilité n'est pas quadratique et que l'utilité marginale est convexe ($u'''(C) > 0$), on a (inégalité de Jensen)

$$u'(C_t) = E_t\left(u'(C_{t+1})\right) > u'\left(E_t(C_{t+1})\right)$$

et comme $u'(C)$ est décroissante, on a finalement

$$C_t < E_t(C_{t+1})$$

La consommation courante est inférieure à la consommation future anticipée.

Quand l'utilité marginale est convexe et l'environnement incertain, il y a réduction de la consommation courante et accroissement de l'épargne. On appelle cette épargne *épargne de précaution*.

Exemple du modèle à 2 périodes, avec revenu R_1 incertain.

$$\max_S U(\overbrace{R_0 - S}^{C0}) + \frac{1}{1+\rho} E_0 U(\overbrace{R_1 + (1+r)S}^{C1})$$

CPO :

$$U'(R_0 - S) = \frac{1+r}{1+\rho} E_0 U'(R_1 + (1+r)S)$$

On suppose que la ditribution de probabilité de $R-1$ est fonction d'un paramètre σ tel qu'un σ plus élevé signifie une distribution de probabilité 'plus aléatoire' au sens de Rotschild-Stiglitz (1970).

On différentie la CPO :

F=U'-(1+r)/(1+ro)E0U'; dS/dsig=-(dF/dsig)/(dF/dS)

$$\begin{aligned} & -\left[U''(R_0 - S) + \frac{(1+r)^2}{1+\rho} E_0 U''(R_1 + (1+r)S)\right] dS \\ = \quad & \frac{1+r}{1+\rho} \frac{\partial E_0 U'(R_0 + (1+r)S)}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned}$$

voir graphique

$$U' \text{ convexe} \Longrightarrow \frac{\partial E_0 U'(R_0 + (1+r)S)}{\partial \sigma} > 0.$$

On en déduit

$$\frac{dS}{d\sigma} > 0$$

Epargne de précaution : plus d'aléa dans la distribution de $R_1 \Longrightarrow$ plus d'épargne.

IV. Cycle de vie et épargne macroéconomique

On revient au modèle de cycle de vie, sans legs ni héritages, sans incertitude et avec deux périodes de vie.

- c_t consommation d'un agent né en t au cours de sa première période de vie, la « jeunesse »
- d_{t+1} sa consommation au cours de la période suivante, la « vieillesse »
- L'agent travaille au cours de sa jeunesse pour un revenu réel w_t et est à la retraite au cours de sa vieillesse, sans revenu autre que celui de son épargne
- L'épargne nette de cet agent sur la durée entière de sa vie est nulle :

$$\begin{cases} c_t + e_t = w_t \\ d_{t+1} = (1+r)e_t \end{cases}$$

L'agent épargne au cours de sa vie active un montant e_t juste suffisant pour couvrir ses besoins de consommation au cours de sa retraite, durant laquelle il désépargne $(-e_t)$.

Pourquoi alors le taux d'épargne macro n'est-il pas nul ?

Une population est composée de « générations » d'agents qui se comportent selon le modèle de cycle de vie.

À toute date t naissent des agents en nombre L_t. Chacun de ces agents consomme c_t au cours de sa jeunesse et d_{t+1} au cours de sa vieillesse. On suppose que la population de l'économie croît au taux n constant, c'est-à-dire que les agents qui naîtront en $t+1$ seront en nombre $L_{t+1} = (1+n)L_t$. À chaque date t coexistent donc deux types d'agents : les "jeunes" en nombre L_t et les "vieux" en nombre $L_{t-1} = L_t/(1+n)$.

Modèle à générations imbriquées.

La richesse de l'un des agents nés en t est $W_t = w_t$ et, si sa fonction d'utilité est à élasticité de substitution intertemporelle constante, ses consommations optimales sont :

$$c_t = \frac{1+r}{2+\alpha+r} w_t \quad \text{et} \quad d_{t+1} = (1+\alpha)c_t$$

Alors,

$$e_t = w_t - c_t = \left(1 - \frac{1+r}{2+\alpha+r}\right) w_t = \frac{1+\alpha}{2+\alpha+r} w_t$$

Consommation agrégée en t : somme des consommations de l'ensemble des jeunes et de celle de l'ensemble des vieux :

$$C_t = L_t c_t + L_{t-1} d_t = L_t \left(c_t + \frac{1+\alpha}{1+n} c_{t-1}\right)$$

=Lt/(1+n)

Épargne agrégée nette : somme de l'épargne financière des jeunes et de la désépargne des vieux :

$$E_t = L_t e_t + L_{t-1}(-e_{t-1}) = L_t \frac{1+\alpha}{2+\alpha+r} \left(w_t - \frac{w_{t-1}}{1+n}\right)$$

gt=(1+n)gt-1

- Si le w ne varie pas au cours du temps et si la croissance démographique est nulle, cette épargne agrégée nette est nulle. L'épargne des jeunes est intégralement compensée par la désépargne des vieux.
- Si w croît au taux g constant (croissance régulière de la productivité du travail), l'épargne agrégée nette vaut :

$$E_t = L_t \frac{1+\alpha}{2+\alpha+r}\left(1 - \frac{1}{(1+g)(1+n)}\right) w_t$$

Elle est positive si et seulement si $(1+g)(1+n) > 1$ c'est-à-dire en présence de croissance démographique (jeunes en phase d'épargne sont nombreux que les vieux en phase de désépargne qu'ils remplacent) et/ou de croissance de la productivité du travail (jeunes plus riches que les vieux qu'ils remplacent).

Autres motifs d'épargne macroéconomique :

- Désir de laisser un legs plus élevé que l'héritage qu'on a reçu.
- Épargne de précaution.
- Le modèle CV–RP suppose les ménages homogènes. La prise en compte de l'hétérogénéité des ménages permet de mieux expliquer les évolutions observées de l'épargne macroéconomique (comportement keynésien des jeunes contraints par la liquidité, comportement de cycle de vie des classes moyennes et comportement dynastique des plus âgés et des plus riches ?)

V. Extensions

- Formation d'habitudes : il n'y a plus séparabilité intertemporelle de la fonction d'utilité ; le niveau d'utilité ourant dépend des décisions de consommations passées.
- La consommation n'est pas juste une décision individuelle mais elle est ancrée dans un contexte social. Keeping up with the Joneses.